Continuità della funzione integrale

Enunciato Siano a e b due numeri reali, con $a < b$, e sia f una funzione limitata e integrabile su $[a, b]$. Allora la funzione F definita da

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall\, x \in\,]a, b] \tag{1}$$

è continua in tutto $]a, b[$ e continua a sinistra in b. Infine, ponendo $F(a) := 0$ si ha che F è continua a destra in a. $\square$

Dimostrazione. Ricordiamo alcune definizioni e alcuni risultati sulle funzioni limitate e sul loro integrale.

- Ricordiamo che una funzione f si dice **limitata** su un insieme I se esiste un K in $\mathbb{R}$ tale che

$$|f(x)| \le K \qquad \forall x \in I \tag{2}$$

- Ricordiamo che se una funzione limitata è integrabile su un intervallo (diciamo, nel nostro caso, $[a, b]$), allora è integrabile anche in ogni subintervallo di $[a, b]$. Quindi la (1) è corretta.
- Ricordiamo inoltre che se una funzione limitata è integrabile su un intervallo (α, β) (con $\alpha < \beta$) e se K è tale che la (2) sia verificata allora

$$\Big|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \le K(\beta - \alpha). \tag{3}$$

Siamo allora pronti per la dimostrazione. Limitiamoci a dimostrare la continuità in un punto interno x_0. In modo analogo si dimostra la continuità a sinistra in b e la continuità a destra in a. Dobbiamo quindi far vedere che

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0),$$

che può anche essere scritta

$$\lim_{x \to x_0} F(x) - F(x_0) = 0. \tag{4}$$

Ricordando la (1) si ha che la (4) può essere scritta

$$\lim_{x \to x_0} \int_x^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5}$$

Ricordando la (3) abbiamo ora

$$-K|x_0 - x| \le \int_x^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x \le K|x_0 - x|$$

e la (5) segue dal teorema dei carabinieri.

Le mucche sembrano un po' confuse. Vediamo una versione più ruspante.

Enunciato Sia f una funzione limitata e integrabile su $[a,b]$. Allora la funzione F definita da

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall\, x \in [a,b] \tag{6}$$

è continua in tutto $[a,b]$. $\square$

Dimostrazione. Abbiamo dalla (6)

$$F(x) - F(x_0) = \int_x^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Se f è limitata, allora esisterà un un K in $\mathbb{R}$ tale che

$$|f(x)| \leq K \qquad \forall x \in [a,b] \tag{8}$$

che unita alla (7) ci dà facilmente

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_x^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq K|x - x_0|$$

da cui segue immediatamente la tesi. $\square$

Le mucche sembrano molto sollevate. Sono convinte di avere (finalmente) capito il teorema, e si domandano perché la prima versione fosse tanto complicata. In realtà la seconda versione è un utile e rapido cenno che può essere veramente capito solo da qualcuno che conosce già il risultato (e quindi sta solo ripassando) oppure da qualcuno molto dotato che inoltre ha già capito a fondo (e ricorda perfettamente) i risultati precedenti che bisogna utilizzare. Queste persone sarebbero in grado di **ricostruire autonomamente** la prima versione (che trovano noiosa, ma **non** complicata).

Se qualcuno (come le nostre amiche mucche) trova la seconda versione *semplice* e la prima *complicata* vuol dire che, di base, **non capisce l'analisi**. Cápita. Non è pericoloso per la salute. Infatti, le mucche *stanno benissimo*